

Normalitaet und verwandte Eigenschaften in lokal-konvexen Vektorraeumen

von

Rainer Bellmann

aus

Walsrode

1074 220



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543108_0039

Normalitaet und verwandte Eigenschaften in lokal-konvexen Vektorraeumen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Rainer Bellmann

aus

Walsrode

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung : 2. Mai und 3. Mai 1974

Dekan: Professor Dr. J. Christiansen

Erstberichterstatte: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatte: Professor Dr. D. Koelzow

Inhalt

Einleitung	1
§ 0 Bezeichnungen und Hilfsmittel	6
§ 1 Normale Mengen in lokal-konvexen Vektorraeumen	8
§ 2 Das Verhalten von Normalitaet und verwandter Begriffe unter verschiedenen Topologien	35
2.1 Die Ergebnisse von JAMESON	35
2.2 Normalitaet	39
2.3 Die Eigenschaft (G)	48
2.4 Die Eigenschaft (aG)	59
Literaturverzeichnis	62

Einleitung.

In der Arbeit [2] wurde von H.BAUER der Begriff der Normalitaet fuer Teilmengen lokal-konvexer Raeume eingefuehrt und es wurde gezeigt, daß jede vollstaendige, konvexe Menge in einem schwachen Hausdorff-Raum genau dann normal ist, wenn sie keine affine Gerade enthaelt.

Der Beweis hierzu beruhte auf einem Satz von CHOQUET, der besagt, daß jedes stetige, affin-lineare Funktional auf einer solchen Menge Differenz zweier stetiger, positiver, affin-linearer Funktionele ist.

Bezeichnen wir mit $A(K)$ die Menge der stetigen, affin-linearen Funktionele auf einer konvexen Menge K und mit $A(K)^+$ die Menge der positiven Elemente aus $A(K)$, so wird im ersten Teil dieser Arbeit der Zusammenhang zwischen der Normalitaet einer konvexen Menge K und der Zerlegungseigenschaft $A(K) = A(K)^+ - A(K)^+$ untersucht.

Es zeigt sich, daß aus der Normalitaet immer die Zerlegungseigenschaft folgt und daß unter gewissen

Voraussetzungen, z.B. der Metrisierbarkeit von K , auch die Umkehrung davon gilt.

Den Zugang zu diesen Aussagen liefert der Hauptsatz (1.18) des ersten Paragraphen:

Ein Kegel P mit in P abgeschlossener Basis ist genau dann normal, wenn die Basis normal ist.

Mit Hilfe dieses Satzes ist es dann moeglich, die von H.SCHAEFER in [10] und von G.JAMESON in [6], [7] entwickelte Theorie der durch einen normalen, positiven Kegel geordneten, lokal-konvexen Vektorraeume zu verwenden.

Im Abschnitt 2.2 werden einige Fragen ueber das Verhalten von Normalitaet unter verschiedenen Topologien beantwortet. Es zeigt sich, daB Normalitaet bezueglich der starken Topologie eines dualen Paares (E, F) nicht aequivalent zur Normalitaet bezueglich der schwachen Topologie ist. AuBerdem wird ein Beispiel fuer einen Kegel in einem lokal-konvexen Raum (E, t) angegeben der normal bezueglich der schwachen Topologie von (E, E') , nicht aber normal in (E, t) ist.

G. JAMESON fuehrte in [7] und [8] die Eigenschaften (N), (G) und (aG) fuer Paare konvexer Kegel (A, B) in topologischen Vektorraeumen ein. Die Definitionen und die Ergebnisse aus [8], die diese Eigenschaften betreffen, habe ich in Abschnitt 2.1 zusammengestellt, ohne dabei auf Beweise einzugehen.

Die Eigenschaft (N) sagt etwas aus ueber die Lage der Kegel A, B bezueglich $A \cap B$ und ist eine Erweiterung des Begriffs der Normalitaet.

Ein spitzer, konvexer Kegel P in einem lokal-konvexen Raum E ist genau dann normal, wenn $(P, -P)$ die Eigenschaft (N) besitzt. Die Eigenschaft (N) in einem lokal-konvexen Raum E vererbt sich auf die schwache Topologie des dualen Paares (E, E') , falls $A \cap B$ ein linearer Teilraum ist.

Die Eigenschaft (G) ist in gewisser Weise eine zu (N) duale Eigenschaft und sagt etwas ueber die Lage von A und B bzueglich $A + B$ aus.

Fuer algebraisch komplementaere Teilraeume A, B in einem lokal-konvexen Raum besagt die Eigenschaft (G) gerade, daB die Raeume A, B auch topologisch komplementaer sind.

Der Spezialfall $A = -B$ wurde von WALSH in [11] unter der Bezeichnung konormaler Kegel untersucht. Konormale Kegel P in einem lokal-konvexen Raum E haben die Eigenschaft, daß sich jedes stetige, affine lineare Funktional f auf P zu einem stetigen, affinen linearen Funktional $\bar{f}$ auf E fortsetzen läßt. Beispiele konormaler Kegel sind abgeschlossene, erzeugende, konvexe Kegel in Banach-Räumen.

Im Abschnitt 2.3 wird bewiesen, daß sich die Eigenschaft (G) in einem lokal-konvexen Raum auf die Mackey-Topologie des Paares (E, E') vererbt, falls $A + B$ ein linearer Teilraum ist. Außerdem wird ein Beispiel für einen abgeschlossenen, konvexen Kegel in einem Banach-Raum angegeben, der nicht konormal ist.

Im letzten Abschnitt wird gezeigt, daß jedes Paar (A, B) linearer Teilräume in einem lokal-konvexen Raum E die Eigenschaft (aG) bezüglich der schwachen Topologie des Paares (E, E') besitzt und daß sich die Eigenschaft (aG) nicht auf Mackey-Topologien vererbt.

Herrn Prof. Dr. H. Bauer moechte ich fuer seine Anregungen, sein Interesse und seine Geduld ganz herzlich danken. Ebenso gilt mein Dank fuer fruchtbare und hilfreiche Diskussionen Herrn Prof. Dr. J. Bliedtner und Herrn Prof. Dr. W. Hansen.

§ 0. Bezeichnungen und Hilfsmittel.

Hier sollen einige der in dieser Arbeit auftauchenden Begriffe erklart werden. Zunaechst ist E immer ein Vektorraum ueber R , dem Koerper der reellen Zahlen. Eine Menge P in E heißt Kegel, wenn $R^+.P \subset P$ ist; P heißt spitzer Kegel, wenn außerdem noch $P \cap -P = \{0\}$ gilt.

Mit $ko(A)$ bezeichnen wir die konvexe Huelle einer Teilmenge A von E .

Ein LKR ist ein lokal-konvexer Raum, und ein LKHR ist ein lokal-konvexer Hausdorff-Raum.

Wenn nichts anders erwaeht wird, tragen Produkte topologischer Raeume immer die Produkttopologie.

Fuer einen LKR E bezeichnen wir mit E' den topologischen Dualraum, mit $s(E, E')$ die schwache Topologie und mit $m(E, E')$ die Mackey-Topologie des dualen Paares (E, E') .

Eine Teilmenge A einer prae -geordneten Menge $(M, \leq)$ heiße ordnung-konvex, wenn mit $x, y \in A$ und $x \leq z \leq y$ auch $z \in A$ ist.

Mit $\langle A \rangle$ bezeichnen wir die ordnungs-konvexe Huelle

von A , also die Menge

$$\langle A \rangle = \{ z \in M \mid \text{es gibt } x, y \in A \text{ mit } x \leq z \leq y \} .$$

Ist $f : A \longrightarrow M$ eine Abbildung, $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $m \in M$, so ist

$$\{f \leq m\} := \{ x \in A \mid f(x) \leq m \} .$$

Entsprechend werden die Mengen $\{f \geq m\}$ und $\{f = m\}$ definiert. •

Schließlich bezeichnet N die Menge der natuerlichen Zahlen.

§ 1. Normale Mengen in lokal-konvexen
Vektorraeumen.

In diesem Paragraphen wird der Zusammenhang zwischen der Normalitaet einer konvexen Menge K in einem LKR E und einer Zerlegungseigenschaft des Raumes $A(K)$ untersucht. 6

Dabei zeigt sich, daß viele Aussagen ueber die Menge K aus den entsprechenden Aussagen ueber den konvexen Kegel $R^+(K \times \{1\})$ in $E \times R$ abgeleitet werden koennen. Zum Beispiel ist K genau dann normal in E , wenn $R^+(K \times \{1\})$ normal in $E \times R$ ist.

Auf diese Weise laeßt sich die fuer geordnete Vektorraeume entwickelte Dualitaetstheorie auch fuer die Untersuchung konvexer Mengen verwenden.

Um die oben erwaehte Beziehung zwischen normalen, konvexen Mengen und normalen, konvexen Kegeln abzuleiten, verwenden wir den von JAMESON in [6] eingefuehrten Begriff der Verbundenheit von Mengen in topologischen Vektorraeumen.

1.1 Definition. Sei K eine Menge in einem Vektorraum E und p eine Halbnorm auf E .

K heiße p -normal, falls $a_p, b_p \in \mathbb{R}$ existieren, so daß fuer alle $x, y \in K$ gilt:

$$(1) \quad p(x) \leq a_p + b_p \cdot p(x + y) .$$

K heiße normal in E , wenn E ein LKR ist und wenn es eine die Topologie von E definierende Menge F von Halbnormen gibt, so daß K fuer jedes $p \in F$ p -normal ist.

1.2 Definition. Seien A, B Teilmengen eines LKR E . A heiße mit B in E verbunden, wenn fuer jede Nullumgebung U eine Nullumgebung V existiert, so daß fuer alle $x \in A$, $y \in B$ mit $x + y \in V$ gilt:

$$x \in U \text{ und } y \in U .$$

A heiße mit sich in E verbunden, wenn A mit A in E verbunden ist.

Wenn keine Verwechslungen auftreten koennen, lassen wir den Zusatz "in E " bei den Definitionen 1.1 und 1.2 weg.

JAMESON schreibt in [6] "A allied to B" fuer
"A verbunden mit B" und "A is self-allied" fuer
"A ist mit sich verbunden".

1.3 Satz. Fuer einen konvexen Kegel P in einem
LKR E sind die folgenden Aussagen aequivalent:
(i) P ist normal;
(ii) P ist mit sich verbunden;
(iii) in der durch P induzierten Praeordnung
besitzt E eine Nullumgebungsbasis aus ordnungs-
konvexen Mengen.

Beweis. (ii) $\iff$ (iii) ([7]; 3.2.3)

Die Aequivalenz (i) $\iff$ (iii) wird in ([2]; S.9)
gezeigt; dabei ist nur zu beachten, daß ein Kegel P
normal im Sinne von SCHAEFER ([10]; S.215) ist, wenn
er (iii) erfuehlt.

—1

Fuer beliebige konvexe Mengen sind die Begriffe
"normal" und "mit sich verbunden" nicht aequivalent.
Dazu einige Bemerkungen.

1.4 Eigenschaften normaler Mengen und Beispiele.

(i) Beschränkte Mengen in einem LKR sind normal ([2];S.9), aber im allgemeinen nicht mit sich verbunden.

Sei nämlich $K := \langle -1, +1 \rangle \subset \mathbb{R}$ und $U := \langle -1/2, +1/2 \rangle$.

Für jede Nullumgebung V ist dann $1 + (-1) \in V$ und $1 \notin U$. Also ist K eine beschränkte, nicht mit sich verbundene Menge.

(ii) Eine symmetrische, normale Menge K in einem LKR E ist auch beschränkt. Sei dazu K p -normal für eine Halbnorm p auf E und konstanten a_p, b_p gemäß Def. 1.1 gewählt. Für jedes $x \in K$ ist dann $p(x) \leq a_p + b_p \cdot p(x + (-x)) = a_p$. Also ist K p -beschränkt.

(iii) Normale Mengen in LKHR enthalten keine affinen Geraden. ([2];S.10)

(iv) Die Argumentation in Beispiel (i) zeigt, daß eine mit sich verbundene Menge K in einem LKHR die Bedingung $K \cap -K \subset \{0\}$ erfüllen muß.

(v) Normalitaet ist invariant gegenueber Translationen und Homothetien. ([2]; S.10).

(vi) "Mit sich verbunden" ist invariant gegenueber Homothetien, nicht aber gegenueber Translationen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $E := \mathbb{R}^2$ und bezeichne f die Projektion auf die erste Komponente. Die Menge $K := \{f \geq 1\}$ ist mit sich verbunden. Sei naemlich U eine Nullumgebung und V das Komplement von K . Dann ist V eine Nullumgebung. Wegen $K + K \subset K$ ist die Bedingung $x, y \in K$ und $x + y \in V$ nie erfuehrt, also K mit sich verbunden.

Die Menge $K + (-1, 0)$ ist aber nach (iv) nicht mit sich verbunden, da $(0, 1) \in (K + (-1, 0)) \cap -(K + (-1, 0))$ ist.

(vii) Die Menge K in (vi) enthaelt die affine Gerade $\{1\} \times \mathbb{R}$ und ist nach (iii) ein Beispiel fuer eine nicht normale, mit sich verbundene Menge.

(viii) Aus den Definitionen 1.1 und 1.2 folgt sofort, daB sich Normalitaet und Verbundenheit auf Teilmengen vererbt.

Im naechsten Satz werden einige bekannte Beziehungen zwischen einem konvexen Kegel P und seinem dualen Kegel P^0 aufgefuehrt.

1.5 Satz. Fuer einen konvexen Kegel P in einem LKR E gelten die folgenden Aussagen:

- (i) P normal in $E \implies P^0 - P^0 = E'$;
- (ii) in einem schwachen oder metrisierbaren Raum E gilt auch die Umkehrung von (i) ;
- (iii) ist P ein vollstaendiger, spitzer Kegel in einem schwachen LKHR E , so gilt $P^0 - P^0 = E'$.

Beweis. (i): ([7]; 3.2.2) .

(ii) : ([7]; 3.4.1 und 3.4.8) . Dabei hat man zu beachten, daß Theorem 3.4.1 fuer ein duales Paar formuliert wird, d.h. fuer einen schwachen Hausdorff-Raum, die Hausdorff-Eigenschaft beim Beweis aber nicht verwendet wird.

(iii): ([3]; 2.6.8) .

—|

Im folgenden wird der Satz 1.18 vorbereitet. Dort wird gezeigt, daß ein Kegel mit abgeschlossener Basis genau dann normal ist, wenn die Basis normal ist.

1.6 Satz. Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von LKR und $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie normaler Mengen in den entsprechenden Raeumen. Dann ist $\prod_{i \in I} K_i$ normal in $\prod_{i \in I} E_i$.

Beweis. Sei fuer jedes $i \in I$ eine Menge F_i von Halbnormen gewaehlt, so daB F_i die Topologie von E_i definiert und die Menge K_i fuer jedes $p \in F_i$ p -normal ist. Fuer $p \in F_i$ waehle man $a_p, b_p \in \mathbb{R}$ so, daB (1) von Def. 1.1 fuer alle $x, y \in K_i$ erfuehlt ist.

Zu $j \in I$ bezeichne $f_j : \prod_{i \in I} E_i \longrightarrow E_j$ die Projektion auf die j -te Komponente.

Sei

$$F := \{ \sum_{i \in J} p_i \circ f_i \mid J \subset I \text{ endlich; } p_i \in F_i \ (i \in J) \}.$$

Dann ist F eine die Topologie von $\prod_{i \in I} E_i$ definierende Menge von Halbnormen, und fuer $p \in F$ mit $p = \sum_{i \in J} p_i \circ f_i$ erfuehlen die Konstanten

$$a_p := \sum_{i \in J} a_{p_i} \quad , \quad b_p := \max_{i \in J} b_{p_i}$$

die Bedingung (1) von Def. 1.1 fuer alle $x, y \in \prod_{i \in I} K_i$.

Also ist $\bigcup_{i \in I} K_i$ normal in $\bigcup_{i \in I} E_i$. _ |

1.7 Korollar. Für jede normale Menge K in einem LKR E ist $K \times \mathbb{R}^+$ normal in $E \times \mathbb{R}$.

Beweis. $\mathbb{R}^+$ ist normal in $\mathbb{R}$. _ |

1.8 Korollar. Sei K eine konvexe, normale Menge in einem LKR E und sei $0 \in K$. Dann ist $\langle 0, 1 \rangle \cdot (K \times \{1\})$ normal in $E \times \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen $0 \in K$ ist $\langle 0, 1 \rangle \cdot (K \times \{1\}) \subset K \times \mathbb{R}^+$. Die Behauptung folgt also nach 1.4 (viii). _ |

1.9 Korollar. Eine Menge K in einem LKR E ist genau dann normal, wenn $K \times \{1\}$ in $E \times \mathbb{R}$ normal ist.

Beweis. a) Sei K normal in E . Nach 1.7 und 1.4 (viii) ist $K \times \{1\}$ in $E \times \mathbb{R}$ normal.

b) Sei $K \times \{1\}$ in $E \times \mathbb{R}$ normal.

Wegen 1.4 (v) ist auch $K \times \{0\}$ normal. Sei F eine die Topologie von $E \times R$ definierende Menge von Halbnormen, so daß $K \times \{0\}$ fuer jedes $p \in F$ p -normal ist. Es bezeichne $f : E \longrightarrow E \times R$ die kanonische Einbettung.

Dann ist $G := \{ p \circ f \mid p \in F \}$ eine Menge von Halbnormen, K ist q -normal fuer jedes $q \in G$ und G definiert die Topologie von E .

1.10 Satz. Sei P ein Kegel in einem LKR E und U eine Nullumgebung. P ist mit sich verbunden, wenn $P \cap U$ mit sich verbunden ist.

Beweis. ([6]; 2.1).

1.11 Bemerkung. Das Beispiel in 1.4 (vi) zeigt, daß in 1.10 "mit sich verbunden" nicht durch "normal" ersetzt werden darf.

1.12 Satz. Sei K eine konvexe Menge in einem LKR E , $0 \in K$ und $H := \langle 0, 1 \rangle \cdot (K \times \{1\}) \subset E \times R$. H ist genau dann mit sich verbunden, wenn H normal ist.

Beweis. a) Sei H mit sich verbunden. Nach 1.10 ist dann auch der konvexe Kegel $R^+.H$ mit sich verbunden und daher nach 1.3 normal.

b) Sei H normal.

Aus $K \times \{1\} \subset H$ folgt, daß $K \times \{1\}$ normal ist. Somit ist nach 1.9 auch K normal in E .

Sei F eine die Topologie von E definierende Menge von Halbnormen, so daß K fuer jedes $p \in F$ p -normal ist. Zu jedem $p \in F$ seien Konstanten a_p, b_p gewaehlt, so daß (1) von Def. 1.1 fuer alle $x, y \in K$ erfuehlt ist.

Fuer $p \in F, x \in E$ und $r \in R$ sei

$$p'((x, r)) := p(x) + |r|.$$

Die Menge $G := \{ p' \mid p \in F \}$ definiert die Topologie von $E \times R$, und $K \times R^+$ ist p' -normal fuer jedes $p' \in G$. Wegen $H \subset K \times R^+$ ist auch H fuer jedes $p' \in G$ p' -normal.

Annahme: H ist nicht mit sich verbunden.

Dann gibt es eine Umgebung U von $(0,0)$, und zu jeder Umgebung V von $(0,0)$ gibt es Elemente $x_V, y_V \in H$ mit $x_V + y_V \in V$ aber $x_V \notin U$.

Da G die Topologie definiert, koennen wir $p' \in G$ und $e \in \mathbb{R}$ mit $0 < e < 1$ waehlen, so daB

$$\{ x \in E \times \mathbb{R} \mid p'(x) < e \} \subset U$$

gilt.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich

$$x_V + y_V \longrightarrow (0,0)$$

und damit auch

$$(1) \quad p'(x_V + y_V) \longrightarrow 0 .$$

Fuer jedes V ist aber

$$(2) \quad p'(x_V) \geq e .$$

Wegen (1) und (2) koennen wir Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H finden, so daB

$$p'(x_n + y_n) < e \cdot n^{-1} \quad \text{und} \quad p'(x_n) \geq e$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach Definition von H ist jedes x_n von der Form

$$x_n = (u_n, r_n) \quad \text{mit} \quad 1 \geq r_n > 0 \quad \text{und} \quad r_n^{-1} \cdot x_n \in K \times \{1\} \subset H.$$

($r_n \neq 0$, da sonst $x_n = (0,0)$ und damit nicht

$$p'(x_n) \geq e \text{ ist.})$$

Wir erhalten $n \cdot x_n \in H$, da nach der Definition von p'

$$r_n \leq p'(x_n + y_n) < e \cdot n^{-1} < n^{-1}$$

und somit $n < r_n^{-1}$ ist.

Fuer $y_n = (w_n, s_n)$ ergibt sich $y_n \neq (0,0)$, da
 $p'(x_n) \geq e$ und $p'(x_n + y_n) < e$ ist.

Hieraus folgt $s_n \neq 0$, und dieselbe Ueberlegung wie
 fuer x_n liefert $n.y_n \in H$.

Die Konstanten $a_p := a_p$ und $b_p := \max(1, b_p)$
 erfuellen (1) von Def. 1.1 mit p' statt p
 fuer alle $x, y \in H$.

Also gilt:

$$e \leq p'(x_n) < a_p + b_p \cdot p'(x_n + y_n).$$

Wegen $n.x_n, n.y_n \in H$ ist dann auch

$$\begin{aligned} n.e \leq n.p'(x_n) &= p'(n.x_n) < a_p + b_p \cdot p'(n.x_n + n.y_n) = \\ &= a_p + b_p \cdot n.p'(x_n + y_n) < a_p + b_p \cdot n.e \cdot n^{-1} < \\ &< a_p + b_p. \end{aligned}$$

Da dies fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, muß $e = 0$ sein
 im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist H
 mit sich verbunden. _1

1.13 Definition. Eine Basis eines Kegels P ist
 eine konvexe Teilmenge B von P , so daß fuer jedes
 $0 \neq x \in P$ genau eine positive Zahl $f(x)$ existiert
 mit $1/f(x) \cdot x \in B$.

1.14 Lemma. Sei B Basis eines Kegels P in einem LKR E . Dann ist P ein spitzer, konvexer Kegel und es gibt genau eine lineare Abbildung $f : (P - P) \longrightarrow R$ mit

$$B = \{f = 1\} \cap P.$$

Ist B abgeschlossen in P , so ist $f|_B$ stetig.

Beweis. a) P ist ein spitzer, konvexer Kegel, da B konvex ist. Definiert man $f(0) := 0$, so ist die Zuordnung $(x \longmapsto f(x))$ aus der Definition 1.13 auf P additiv und positiv homogen, laeßt sich also zu einer linearen Abbildung $f : (P - P) \longrightarrow R$ fortsetzen und es gilt $B = P \cap \{f = 1\}$.

Ist $g : (P - P) \longrightarrow R$ eine weitere lineare Abbildung mit $B = P \cap \{g = 1\}$, so ist fuer $0 \neq x \in P$

$$g(x) = f(x) \cdot g(1/f(x) \cdot x) = f(x) \quad \text{und damit} \quad f = g.$$

b) Sei B abgeschlossen in P , $f|_B =: f_B$ und $0 < a \in R$. Dann ist $a \cdot B = \{f_B = a\}$ abgeschlossen in P und somit ist $\{f_B \neq a\}$ offen in P .

Sei $x \in \{f_B < a\}$ und U eine konvexe Umgebung von x mit $U \subset \{f_B < a\}$.

Dann ist $f_B(U)$ konvex, $a \notin f_B(U)$ und $f_B(U) \cap \langle 0, a \rangle \neq \emptyset$. Also ist $f_B(U) \subset \langle 0, a \rangle$ und damit $U \subset \{f_B < a\}$.

Die Menge $\{f_B < a\}$ ist also offen.

Ebenso zeigt man die Offenheit von $\{f_B > a\}$ und damit die Stetigkeit von $f|_B$.

1.15 Satz. In LKR E sind Kegel mit affin-homoeomorph, im Kegel abgeschlossenen Basen affin-homoeomorph.

Beweis. a) Sei P ein Kegel in einem LKR E und B eine in P abgeschlossene Basis von P .

$f : (P-P) \longrightarrow R$ sei die lineare Abbildung mit

$$B = \{f = 1\} \cap P.$$

Wir definieren $g : P \longrightarrow R^+.(B \times \{1\}) \subset E \times R$ durch

$$g(x) := (x, f(x)) \quad (x \in P)$$

und $q : R^+.(B \times \{1\}) \longrightarrow P$ durch

$$q((x, r)) := x \quad ((x, r) \in R^+.(B \times \{1\})).$$

Dann ist q eine stetige, zu g inverse lineare Abbildung und g ist nach Lemma 1.14 stetig. Also ist P affin-homoeomorph zum Kegel $R^+.(B \times \{1\}) \subset E \times R$.

b) Seien E_1, E_2 LKR, $K_1 \subset E_1$, $K_2 \subset E_2$ konvexe Mengen und $h : K_1 \longrightarrow K_2$ ein affiner Homoeomorphismus. Wir zeigen, daß $R^+.(K_1 \times \{1\})$ affin-homoeomorph zu $R^+.(K_2 \times \{1\})$ ist.

Für $z \in K_1$ ist der Kegel $R^+.(K_1 \times \{1\})$ affin-homoeomorph zu $R^+.(K_1 - z) \times \{1\}$, vermöge der Abbildung $(r.(x, 1) \longmapsto r.(x - z, 1))$.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $0 \in K_1$, $0 \in K_2$ und $h(0) = 0$ gilt.

Sei $\bar{h} : R^+.(K_1 \times \{1\}) \longrightarrow R^+.(K_2 \times \{1\})$ definiert durch

$$\bar{h}((x, r)) := \begin{cases} (r.h(r^{-1}.x, r)) & r \neq 0 \\ (0, 0) & r = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\bar{h}$ affin und in den Punkten (x, r) mit $r \neq 0$ stetig.

Fuer $r < 1$ ist aber

$$\bar{h}((x, r)) = (r \cdot h(r^{-1}x), r) = (h(x), r),$$

da $0 \in K_1$ und $h(0) = 0$.

Also ist $\bar{h}$ auch stetig in $(0, 0)$.

Aus a) und b) folgt die Behauptung des Satzes. _ |

1.16 Bemerkung. Mit den Bezeichnungen aus Teil a) des Beweises zu Satz 1.15 gilt:

Der Homoeomorphismus $g : P \longrightarrow R^+(B \times \{1\})$ ist im allgemeinen kein Isomorphismus uniformer Raume. Das ist nur dann der Fall, wenn $f|_B$ gleichmaeßig stetig ist, also wenn f stetig ist.

1.17 Satz. Sei P_2 ein konvexer Kegel in einem LKR E_2 und affin-homoeomorph zu einem mit sich verbundenen, konvexen Kegel P_1 in einem LKR E_1 . Dann ist P_2 mit sich verbunden.

Beweis. Ein konvexer Kegel P in einem LKR E ist

genau dann mit sich verbunden, wenn zu jeder Nullumgebung U in P , versehen mit der relativen Topologie, eine Nullumgebung V in P existiert, so daß $x, y \in U$ ist, wenn $x + y \in V$ gilt. Da P ein konvexer Kegel ist, gilt naemlich $P + P \subset P$.

a) Wenn P_1 ein Teilraum von E_1 ist, muß P_1 die indiskrete Topologie tragen, denn da mit $x \in P$ auch $-x \in P$ ist, muß P_1 in jeder Nullumgebung von E_1 enthalten sein. Dann traegt auch P_2 die indiskrete Topologie und ist nach den einleitenden Bemerkungen mit sich verbunden.

b) Sei P_1 kein Teilraum von E_1 und $f : P_1 \longrightarrow P_2$ ein affiner Homoeomorphismus. Dann ist $f(0) = 0$. Sei U eine Nullumgebung in P_2 , also $f^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in P_1 .

Da P_1 mit sich verbunden ist, gibt es eine Nullumgebung W in P_1 , so daß aus $x, y \in P_1$ und $x + y \in W$ folgt: $x, y \in f^{-1}(U)$.

Sei $V := f(W)$. Aus $x, y \in P_2$ und $x + y \in V$ folgt dann $x, y \in U$. Also ist P_2 mit sich verbunden. _1

1.18 Satz. In einem LKR ist ein konvexer Kegel P mit einer in P abgeschlossenen Basis genau dann normal, wenn die Basis normal ist.

Beweis. Sei P ein konvexer Kegel in einem LKR E und B eine in P abgeschlossene Basis von P .

a) Sei P normal. Wegen $B \subset P$ ist auch B normal.

b) Sei B normal und $y \in B$.

Dann ist auch $B - y$ normal.

Wegen 1.8 ist $\langle 0, 1 \rangle ((B - y) \times \{1\})$ normal in $E \times \mathbb{R}$

und wegen 1.12 auch mit sich verbunden. Aus 1.10

folgt, daß $R^+((B - y) \times \{1\})$ mit sich verbunden ist.

$(B - y) \times \{1\}$ ist affin-homoeomorph zu B , und nach

1.15 ist P affin-homoeomorph zu $R^+((B - y) \times \{1\})$.

Also ist P mit sich verbunden (1.17), und gemaeß 1.3

ist P normal. _ |

1.19 Satz. Normalitaet konvexer Mengen ist invariant gegenueber affinen Homoeomorphismen.

Beweis. Fuer $i \in \{1, 2\}$ sei K_i eine konvexe Menge in einem LKR E_i .

K_1 sei normal in E_1 und affin-homöomorph zu K_2 .
 Nach 1.18 ist $R^+(K_1 \times \{1\})$ normal in $E_1 \times R$
 und nach 1.15 affin-homöomorph zu $R^+(K_2 \times \{1\})$.
 Wegen 1.17 und 1.3 ist $R^+(K_2 \times \{1\})$ normal in
 $E_2 \times R$ und aus 1.18 und 1.9 folgt die Normalität
 von K_2 in E_2 . _1

Nachdem 1.18 den Zusammenhang zwischen normalen,
 konvexen Mengen und normalen, konvexen Kegeln deutlich
 gemacht hat, werden wir den Rest dieses Paragraphen
 dazu verwenden, die Ergebnisse in 1.5 auf konvexe
 Mengen zu übertragen.

1.20 Lemma. Sei P ein konvexer Kegel in einem
 LKR und B eine in P abgeschlossene Basis von P .
 Jede stetige, affine Abbildung $f : B \rightarrow R$ besitzt
 genau eine affine Fortsetzung $\bar{f} : P \rightarrow R$ mit
 $\bar{f}(0) = 0$, und diese ist stetig.

Beweis. Wegen 1.15 können wir annehmen, daß P
 von der Form $P = R^+(K \times \{1\}) \subset E \times R$ ist, wobei E
 ein LKR, $0 \in K$ und $K \times \{1\} = B$ ist.

Sei $f : B \longrightarrow R$ eine stetige, affine Abbildung.

Wir koennen ohne Beschraenkung der Allgemeinheit annehmen, daB $f((0,1)) = 0$ ist.

Dann ist die Abbildung $\bar{f} : P \longrightarrow R$, definiert durch

$$\bar{f}((x,r)) := \begin{cases} r.f(r^{-1}.(x,r)) & r \neq 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases}$$

die einzige affine Fortsetzung von f auf P mit $0=f((0,0))$.

Fuer $(x,r) \in P$ mit $0 < r \leq 1$ gilt $x \in K$ und

$$\begin{aligned} \bar{f}((x,r)) &= r.f(r^{-1}.(x,r)) = \\ &= r.f(r^{-1}.x,1) + (1-r).f((0,1)) = f((x,1)). \end{aligned}$$

Wegen $f((0,1)) = 0$ und der Stetigkeit von f ist also

$\bar{f}$ stetig auf $\{(x,r) \in P \mid r < 1\}$ und damit auch auf P . _ |

1.21 Satz. Sei K eine normale, konvexe Menge in einem LKR E . Dann ist $A(K) = A(K)^+ - A(K)^+$.

Beweis. Sei $P := R^+.(K \times \{1\})$. Dann ist wegen 1.18 der Kegel P normal in $F := P - P$, versehen mit der von $E \times R$ induzierten Topologie.

Sei $f \in A(K \times \{1\})$ und $\bar{f}$ die lineare Fortsetzung von f auf F .

t bezeichne die groeßte lokal-konvexe Topologie auf F , die feiner als die Ausgangstopologie ist und in welcher $\bar{f}$ stetig ist. Auf P stimmt t mit der Ausgangstopologie ueberein, da $\bar{f}|_P$ nach 1.20 stetig ist. Somit ist P auch normal in (F, t) , und $\bar{f}$ ist eine stetige Linearform auf (F, t) .

Gemaeß 1.5 (i) existieren stetige Linearformen f_1, f_2 , positiv auf P , so daß $\bar{f} = f_1 - f_2$ gilt. Dann ist fuer $i \in \{1, 2\}$

$$f_i|_{K \times \{1\}} \in A(K \times \{1\})^+,$$

und

$$f = f_1|_{K \times \{1\}} - f_2|_{K \times \{1\}}.$$

Da $A(K)$ isomorph zu $A(K \times \{1\})$ ist, folgt die Behauptung. _1

Wie bei konvexen Kegeln gilt unter gewissen Voraussetzungen die Umkehrung von Satz 1.21.

1.22. Satz. Sei K eine konvexe Menge in einem LKR (E, t) und $t|_K = s(E, E')|_K$. Dann ist K normal in (E, t) , wenn $A(K) = A(K)^+ - A(K)^+$ ist.

Beweis. Wir betrachten den Kegel $P := R^+(K \times \{1\})$ und setzen $F := P - P$. Sei G die Menge aller linearen Fortsetzungen auf F von Elementen aus $A(K \times \{1\})$. Nach Voraussetzung stimmen auf $K \times \{1\}$ die Topologie von $E \times R$ und die schwache Topologie $s(E \times R, (E \times R)')$ ueberein. Da aber alle Funktionen aus G stetig auf $K \times \{1\}$ sind, stimmen auf $K \times \{1\}$ auch die Topologien $s(E \times R, (E \times R)')$ und $s(F, G)$ ueberein.

Da die konstanten Abbildungen in $A(K \times \{1\})$ sind, ist $K \times \{1\}$ eine in P abgeschlossene Basis und es ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$A(K) = A(K)^+ - A(K)^+ \iff P^0 - P^0 = G \quad \langle \frac{1.5}{=} \rangle$$

$$P \text{ ist normal in } (F, s(F, G)) \quad \langle \frac{1.18}{=} \rangle K \times \{1\}$$

$$\text{ist normal in } (F, s(F, G)) \quad \langle \frac{1.19}{=} \rangle$$

$$K \text{ ist normal in } (E, t) .$$

—|

Um die Umkehrung von 1.21 auch unter der Voraussetzung der Metrisierbarkeit von K zu beweisen, formulieren wir einige Saetze von JAMESON ([7]; 3.2.7 und 3.2.13) etwas 'vorsichtiger', so daß sich die Beweise dann noch woertlich auf unseren Fall uebertragen lassen.

1.23 Satz. Sei ein LKR (E, t) durch einen konvexen Kegel P geordnet und besitze $t|_P$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis.

P ist mit sich verbunden, wenn fuer jede beschraenkte Menge $A \subset P$ auch $\langle A \rangle$ beschraenkt ist.

Beweis. Beweis zu ([7]; 3.2.7) .

—|

Das Beispiel 2.2.2 wird zeigen, daß die Abzählbarkeitsbedingung in 1.23 nicht weggelassen werden darf.

1.24 Satz. Sei P ein konvexer Kegel in einem Vektorraum E und seien t_1, t_2 zwei mit der linearen Struktur verträegliche Topologien auf E mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) t_1 und t_2 liefern dieselben beschraenkten Teilmengen von P ;
- (ii) $t_1|_P$ hat eine abzählbare Nullumgebungsbasis;
- (iii) P ist mit sich in (E, t_2) verbunden.

Dann ist P mit sich in (E, t_1) verbunden.

Beweis. Falls P nicht mit sich in (E, t_1) verbunden ist, gibt es nach 1.23 eine beschränkte Menge $A \subset P$, fuer die $\langle A \rangle$ unbeschränkt ist. Wegen $([7]; 3.2.6)$ ist P dann auch nicht in (E, t_2) mit sich verbunden. _ |

1.25 Korollar. Sei P ein konvexer Kegel in einem LKR (E, t) und habe $t|_P$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis. Ist P normal in $(E, s(E, E'))$, so ist P auch normal in (E, t) .

Beweis. Die Voraussetzungen in 1.24 sind wegen 1.3 erfuehlt mit $t_1 := t$ und $t_2 := s(E, E')$. Also folgt die Behauptung. _ |

1.26 Satz. Sei K eine metrisierbare, konvexe Menge in einem LKR E und $A(K) = A(K)^+ - A(K)^+$. Dann ist K normal in E .

Beweis. Wegen 1.19 koennen wir annehmen, daß $0 \in K$ ist. Wir setzen $P := R^+(K \times \{1\})$ und $F := P - P$. Ferner sei d die Restriktion der Produkttopologie von $E \times R$ auf F . $d|_P$ besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis,

da mit K auch $\langle 0,1 \rangle \cdot (K \times \{1\}) \subset K \times \langle 0,1 \rangle$ metrisierbar ist.

Sei G die Menge der linearen Fortsetzungen auf F der Elemente von $A(K \times \{1\})$ und s die groebste Topologie auf F , die feiner als d und als $s(F,G)$ ist.

Die Topologie s ist vertraeglich mit dem dualen Paar (F,G) und auf P stimmt s mit d nach 1.20 ueberein.

Wegen $P^0 - P^0 = G$ ist P gemaeß 1.5 normal in $(F, s(F,G))$ und 1.25 liefert die Normalitaet von P in (F, s) .

Die Normalitaet von K in (E, t) folgt schließlich aus 1.18 und 1.19 .

Vollstaendige, spitze, konvexe Kegel in schwachen Hausdorff-Raeumen sind nach 1.5 normal. Um die Normalitaet von schwach-vollstaendigen, konvexen Mengen ohne Geraden ([2]; Satz 3) auf die Normalitaet schwach-vollstaendiger Kegel zurueckzufuehren, genuegt es, das folgende Lemma zu beweisen.

1.27 Lemma. Sei K eine vollstaendige, konvexe Menge in einem LKR E und enthalte K keine affine Gerade. Dann ist der Abschluß von $R^+(K \times \{1\})$ in $E \times R$ ein vollstaendiger, spitzer, konvexer Kegel.

Beweis. Ohne Beschraenkung der Allgemeinheit nehmen wir $0 \in K$ an.

Bezeichne C den Abschluß von $R^+(K \times \{1\})$ in $E \times R$ und sei $P := R^+(K \times \{1\}) \cup \{(x, 0) \mid R^+x \subset K\}$. Es gilt $R^+(K \times \{1\}) \subset P \subset C$.

a) Wir beweisen die Vollstaendigkeit von C , indem wir die Vollstaendigkeit von P nachweisen.

Sei $((x_i, r_i))_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in P . Wir koennen dabei annehmen, daß $r_i < 1$ und damit $x_i \in K$ fuer alle $i \in I$ ist.

Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in K und konvergiert nach Voraussetzung in K .

Es gibt also ein $x \in K$ und ein $r \leq 1$ mit

$$(x_i, r_i) \longrightarrow (x, r).$$

Zu zeigen ist: $(x, r) \in P$.

Fall 1. $r > 0$.

Dann koennen wir $r_i > 0$ fuer jedes $i \in I$ annehmen, und es gilt:

$$r_i^{-1} \cdot x_i \longrightarrow r^{-1} \cdot x.$$

Da $r_i^{-1} \cdot x_i \in K$ ist fuer jedes $i \in I$, gilt wegen der Abgeschlossenheit von K auch $r^{-1} \cdot x \in K$ und damit ist $(x, r) \in P$.

Fall 2. $r = 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir koennen $r_i < n^{-1}$ und damit $n \cdot x_i \in K$ fuer jedes $i \in I$ annehmen.

Dann ist $n \cdot x \in K$, da K abgeschlossen ist und $n \cdot x_i \longrightarrow n \cdot x$ gilt.

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war und K konvex ist, ergibt sich $\mathbb{R}^+ \cdot x \subset K$, also auch in diesem Fall $(x, r) \in P$.

b) Zu zeigen ist, daß P ein spitzer Kegel ist.

Da $r \geq 0$ fuer alle $(x, r) \in P$ gilt, muß eine Gerade, die in P liegt, auch in $E \times \{0\}$ liegen.

Nach Definition ist aber $P \cap (E \times \mathbb{R}) \subset K \times \{0\}$.

Da K keine Gerade enthaelt, ist also P ein spitzer Kegel.

c) Da K konvex ist, ist auch C konvex.

—|

1.28 Satz. Eine vollstaendige, konvexe Menge K in einem schwachen Hausdorff-Raum E ist normal, wenn sie keine affine Gerade enthaelt.

Beweis. $E \times \mathbb{R}$ ist ein schwacher Hausdorff-Raum und der Abschluß von $R^+(K \times \{1\})$ in $E \times \mathbb{R}$ ist nach 1.27 ein vollstaendiger, spitzer, konvexer Kegel, wenn K keine affine Gerade enthaelt. Wegen 1.5 ist dann der Abschluß von $R^+(K \times \{1\})$ normal in $E \times \mathbb{R}$ und somit gemaeß 1.4 (viii) und 1.19 auch K normal in E .

—|

§ 2. Das Verhalten von Normalitaet und verwandter
Begriffe unter verschiedenen Topologien.

2.1 Die Ergebnisse von JAMESON.

Ich moechte kurz die Ergebnisse aus der Arbeit von JAMESON [8] zitieren, ohne dabei auf die Beweise einzugehen.

2.1.1 Definition. Ein Paar konvexer Kegel (A, B) in einem LKR habe die Eigenschaft (G), wenn zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V existiert, so daß gilt:

$$V \cap (A + B) \subset (A \cap U) + (B \cap U) .$$

Das Paar habe die Eigenschaft (N), wenn zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V existiert, so daß gilt:

$$(A + V) \cap (B + V) \subset (A \cap B) + U .$$

2.1.2 Fuer lineare Teilraeume stimmen die Eigenschaften (N) und (G) ueberein.

2.1.3 Algebraisch komplementäre Teilräume A, B sind genau dann auch topologisch komplementär, wenn (A, B) die Eigenschaft (G) hat.

2.1.4 Wenn $A \cap B$ ein linearer Teilraum des LKR E ist, hat (A, B) die Eigenschaft (N) genau dann, wenn $A/A \cap B$ mit $-B/A \cap B$ in $E/A \cap B$ verbunden ist.

Speziell ist also ein spitzer, konvexer Kegel A genau dann normal, wenn $(A, -A)$ die Eigenschaft (N) hat.

2.1.5 Für abgeschlossene, konvexe Kegel A, B in einem Frechet-Raum ist die Bedingung (G) notwendig und hinreichend für die Abgeschlossenheit von $A + B$, falls $A + B$ ein linearer Teilraum ist.

2.1.6 In einem Banach-Raum E mit Normdual E' sind die Eigenschaften (N) und (G) im folgenden Sinn dual:

- (1) (A, B) hat die Eigenschaft (N) genau dann, wenn (A^0, B^0) die Eigenschaft (G) hat.
- (2) (A, B) hat die Eigenschaft (G) genau dann, wenn (A^0, B^0) die Eigenschaft (N) hat.

2.1.7 Wenn $A \cap B$ ein Teilraum von E ist, vererbt sich die Eigenschaft (N) auf die schwache Topologie $s(E, E')$. Die Eigenschaft (N) in der schwachen Topologie folgt dabei aus rein algebraischen Eigenschaften der dualen Kegel.

2.1.8 Für den speziellen Fall $A = -B$ wurde die Eigenschaft (G) von WALSH in [11] unter der Bezeichnung "konormaler Kegel" untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß geordnete LKR deren positiver Kegel sowohl normal als auch konormal (binormal) ist einige wichtige Eigenschaften mit lokal-konvexen Vektorverbänden teilen.

Beispiele für binormale Kegel sind normale, konvexe, erzeugende Kegel in Banach-Räumen.

2.1.9 Definition. Ein Paar konvexer Kegel (A, B) in einem LKR habe die Eigenschaft (aG), wenn zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V existiert, so daß gilt:

$$(A + B) \cap V \subset \overline{(A \cap U) + (B \cap U)}.$$

2.1.10 In einem metrisierbaren Raum genuegt es oft, statt der Eigenschaft (G) die etwas schwaechere Eigenschaft (aG) zu fordern:

Wenn A vollstaendig, B abgeschlossen und $A + B$ ein linearer Teilraum ist, folgt aus der Eigenschaft (aG) schon die Eigenschaft (G) .

2.1.11 In einem beliebigen LKR hat das Paar (A, B) die Eigenschaft (aG) genau dann, wenn das Paar $(\bar{A}, \bar{B})$ die Eigenschaft (aG) hat.

Ein Beispiel von JAMESON zeigt, daß dies nicht fuer die Eigenschaft (G) gilt.

2.2 Normalitaet.

Von JAMESON wurde in ([7]; 3.5.4) gezeigt, daß fuer schwach-abgeschlossene, konvexe Kegel in Dualraeumen von Fréchet-Raeumen aus der Normalitaet bezueglich der starken Topologie die Normalitaet bezueglich der schwachen Topologie folgt.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen, daß dabei weder die schwache Abgeschlossenheit des Kegels noch die Fréchet-Eigenschaft des Dualraumes weggelassen werden darf.

2.2.1 Beispiel. Sei $X := \langle 0,1 \rangle$, C der Raum der stetigen, reellen Funktionen auf X und M der Raum der Radon-Maße auf X .

λ bezeichne das Lebesgue-Maß auf X .

Der Kegel $P_1 \subset M$ sei der Kegel der positiven, diskreten Maße, $P_2 := -R^+ \cdot \lambda$ und $P := P_1 + P_2$.

Dann ist der Kegel P normal in $(M, ||.||)$, aber nicht normal in $(M, s(M,C))$.

Beweis. a) P ist normal in $(M, || \cdot ||)$:

Sei M_1 der Raum der diskreten Maße und M_2 der Raum der diffusen Maße auf X .

Da fuer alle $\mu \in M_1$ und $\nu \in M_2$ gilt:

$$||\mu + \nu|| = ||\mu|| + ||\nu||,$$

ist die Abbildung $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$, definiert durch

$$f((\mu, \nu)) := \mu + \nu,$$

eine Isometrie.

Der Kegel M^+ der positiven Maße ist nach 1.5 (ii) normal in $s(M, C)$, da $-C^+ = (M^+)^0$ und $C = C^+ - C^+$ ist.

Gemäß ([7]; 3.5.14) ist M^+ auch normal in $(M, || \cdot ||)$, und wegen $P_1 \subset M^+$ ist nach 1.4 (viii) auch P_1 normal in $(M, || \cdot ||)$. 1.19 liefert schließlich die Normalitaet von P_1 in $(M_1, || \cdot ||)$.

Der Kegel P_2 ist normal in $(M_2, || \cdot ||)$, da er affin-homoeomorph zu dem normalen Kegel R^+ ist.

Die Abbildung f definiert einen affinen Homoeomorphismus von $P_1 \times P_2$ auf P .

Da $P_1 \times P_2$ gemäß 1.6 normal ist, folgt aus 1.19 die Normalitaet von P in $(M, || \cdot ||)$.

b) P ist nicht normal in $(M, s(M, C))$:

Sei $\bar{P}$ der schwache Abschluß von P .

Da sich jedes positive Maß durch positive Maße mit endlichem Traeger schwach approximieren laeßt ([4]; S.221), ist $\lambda \in \bar{P}$ und somit $R.\lambda \subset \bar{P}$.

Wegen 1.4 (iii) ist also $\bar{P}$ nicht normal in $(M, s(M, C))$ und nach ([7]; 3.2.4 (ii)) ist P nicht normal in $(M, s(M, C))$. _ |

2.2.2. Beispiel. Sei $X := \langle 0, 2 \rangle$, C der Raum der stetigen, reellen Funktionen auf X , M der Raum der Radon-Maße auf X und

$$E := \{ \mu \in M \mid \mu(\{1\}) = 0 \}.$$

P_1 sei der Kegel der positiven Maße in E , deren Traeger in $\langle 0, 1 \rangle$ enthalten ist, und P_2 sei der Kegel der negativen Maße in E , deren Traeger in $\langle 1, 2 \rangle$ enthalten ist.

Der Kegel $P := P_1 + P_2$ ist normal in der starken Topologie des Paares (E, C) und nicht normal in der schwachen Topologie $s(E, C)$.

Beweis. a) P ist normal in der starken Topologie des Paares (E, C) :

Die starke Topologie des Paares (E, C) ist die Norm-Topologie auf E . Dazu muß gezeigt werden, daß die $s(C, E)$ beschränkten Mengen in C mit den $s(C, M)$ beschränkten Mengen übereinstimmen.

Sei $K \subset C$ eine $s(C, E)$ beschränkte Menge.

Bezeichnen wir das Punktmaß an einer Stelle $x \in X$ mit δ_x , so ist $M = E + R \cdot \delta_1$.

Um die Beschränktheit von K in $s(C, M)$ nachzuweisen muß also gezeigt werden, daß $\delta_1(K)$ beschränkt ist.

Annahme: $\delta_1(K)$ ist nach oben unbeschränkt.

Es gibt also zu jedem $r \in R$ ein $f \in K$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt:

$$(1) \quad f(x) > r \quad (|x - 1| < \varepsilon).$$

Wir konstruieren eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus \{1\}$ und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit der Eigenschaft

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n 2^{-i} \cdot f_m(x_i) \geq \sum_{i=1}^m 2^{-i} \cdot f_m(x_i) \geq m \quad (m \leq n).$$

Dann ist $\mu := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \cdot \delta_{x_i} \in E$,

und fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mu(f_n) \geq n$.

Also ist $\mu(K)$ unbeschaenkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Konstruktion der Folgen :

Waehle f_1 und ε_1 , so daB (1) fuer $f := f_1$,

$\varepsilon := \varepsilon_1$ und $r := 1$ gilt.

Setze $x_1 := 1 + (1/2) \cdot \varepsilon_1$.

Seien $f_1, \dots, f_n; x_1, \dots, x_n$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ so gewaehlt,

daB fuer $h \leq k \leq n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^k 2^{-i} \cdot f_h(x_i) \geq \sum_{i=1}^h 2^{-i} \cdot f_h(x_i) \geq h$$

und

$$f_h(x) \geq h \quad (|x - 1| < \varepsilon_h).$$

Es ist $\mu_n := \sum_{i=1}^n 2^{-i} \cdot \delta_{x_i} \in E$ und daher $|\mu_n(K)|$

beschaenkt, etwa durch $M > 0$.

Waehle f_{n+1} und ε_{n+1} , so daB (1) fuer $f := f_{n+1}$,

$\varepsilon := \varepsilon_{n+1}$ und $r := M + (n+1) \cdot 2^{n+1}$ gilt.

Setze

$$x_{n+1} := 1 + (1/2) \cdot \min_{1 \leq i \leq n+1} \varepsilon_i.$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{-i} \cdot f_k(x_i) \geq \sum_{i=1}^k 2^{-i} \cdot f_k(x_i) \geq k \quad (k \leq n+1).$$

Nach Konstruktion erfuellen die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft (2) .

Sei $E_1 := \{ \mu \in E \mid \text{Traeger von } \mu \subset \langle 0,1 \rangle \}$
und $E_2 := \{ \mu \in E \mid \text{Traeger von } \mu \subset \langle 1,2 \rangle \}$.

Dann ist $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, $E_1 + E_2 = E$
und fuer $\mu \in E_1$, $\nu \in E_2$ gilt:

$$\| \mu + \nu \| = \| \mu \| + \| \nu \| .$$

Also ist $(E, \| \cdot \|)$ isometrisch zu $(E_1, \| \cdot \|) \times (E_2, \| \cdot \|)$.

Wie im Beweis Teil a) zu 2.2.1 zeigt man,

daß P_1 normal in $(E_1, \| \cdot \|)$, P_2 normal in $(E_2, \| \cdot \|)$
und damit auch P normal in $(E, \| \cdot \|)$ ist.

b) Sei $\bar{P}$ der Abschluß von P in $(M, s(M, C))$.

$\bar{P}$ enthaelt die Gerade $R \cdot \delta_1$ und ist nach 1.4 (iii)
nicht normal in $(M, s(M, C))$. Also ist P nach
([7]; 3.2.4 (ii)) nicht normal in $(M, s(M, C))$ und
nach 1.19 auch nicht normal in $(E, s(E, C))$.

2.2.3 Bemerkung.

Wir wollen sagen, ein konvexer
Kegel P in einem LKR (E, t) habe die Eigenschaft (B),
wenn fuer jede beschraenkte Menge $A \subset E$ auch die
ordnungs-konvexe Huelle $\langle A \rangle$ von A beschraenkt ist.

Normale Kegel haben die Eigenschaft (B) ([7]; 3.2.6), und wenn t metrisierbar ist, gilt hiervon auch die Umkehrung (1.23).

(i) Der Kegel P in Beispiel 2.2.1 hat die Eigenschaft (B) in $(M, s(M, C))$, da P normal in $(M, || \cdot ||)$ ist und die beschränkten Mengen in $(M, || \cdot ||)$ und in $(M, s(M, C))$ uebereinstimmen. P ist aber nicht normal in $(M, s(M, C))$.

(ii) Die Eigenschaft (B) vererbt sich nicht auf Abschluesse. Sei P wieder der Kegel in Beispiel 2.2.1. Die Menge $(\{0\} + \bar{P}) \cap (\{0\} - \bar{P})$ enthaelt die Gerade $R \cdot \lambda$ und ist somit unbeschraenkt.

(iii) Die Eigenschaft (B) impliziert auch dann nicht die Normalitaet eines Kegels, wenn dieser abgeschlossen ist.

Der Kegel P in Beispiel 2.2.2 ist naemlich schwach-abgeschlossen in E , da $P = (P + R \cdot \delta_1) \cap E$ ist und der Kegel $P + R \cdot \delta_1$ in $(M, s(M, C))$ abgeschlossen ist.

P hat die Eigenschaft (B), da P normal in $(E, || \cdot ||)$ ist und die beschränkten Mengen in $(E, || \cdot ||)$ und in $(E, s(E, C))$ uebereinstimmen. P ist nicht normal in $(E, s(E, C))$.

Das naechste Beispiel zeigt, daß im allgemeinen die Normalitaet eines konvexen Kegels in einem LKR E nicht aus der Normalitaet in $(E, s(E, E'))$ folgt. Dies bestaetigt eine Vermutung von JAMESON ([7]; S.100).

2.2.4. Beispiel. Sei $E := \ell_2 \times \ell_2$.

Fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ sei p_n die Minkowski-Norm auf $\mathbb{R}^2$ zu der konvexen Menge

$$\text{ko}\{ \pm (0,1), \pm (1,0), \pm (n,n) \}.$$

Fuer $(x,y) \in E$ setzen wir

$$p((x,y)) := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n((x(n), y(n)))^2 \right)^{1/2}$$

und

$$q((x,y)) := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (x(n))^2 + (y(n))^2 \right)^{1/2}.$$

Dann sind p und q Normen auf E , es ist $p \leq 2 \cdot q$ auf E und (E, q) ist ein zu ℓ_2 isometrischer Banach-Raum.

Sei $P := \ell_2^+ \times \ell_2^+$ der Kegel der positiven Folgen. Es ist $(E, q)' = E$ und $P = P^0$.

Also ist $P^0 - P^0 = (E, q)'$ und damit ist P nach 1.5 (ii) normal in $(E, s(E, E))$ und in (E, q) .

Bezeichne t die groebste Topologie auf E , die feiner ist als die Norm-Topologie von p und als die schwache Topologie $s(E,E)$.

Wegen $p \leq 2.q$ ist t verträglich mit dem dualen Paar (E,E) .

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge e_n gegeben durch

$$e_n(m) := \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}.$$

Dann ist die Folge $((e_n, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine t -Nullfolge, da $((e_n, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine $s(E,E)$ -Nullfolge ist und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p((e_n, e_n)) = 1/n.$$

Die Folge $((e_n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$ ist aber keine t -Nullfolge, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p((e_n, 0)) = 1.$$

Da $(e_n, 0)$, $(0, e_n)$ und (e_n, e_n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ in P liegt, kann der Kegel P nach ([7]; 3.2.5) nicht normal in (E, t) sein.

2.3 Die Eigenschaft (G).

2.3.1 Satz. Seien A, B konvexe Kegel in einem LKR (E, t) und $A + B = E$.

Dann gibt es eine Topologie $t_{A,B}$, die die groebste unter den Topologien ist, die feiner als t sind und fuer die (A, B) die Eigenschaft (G) hat.

Eine Nullumgebungsbasis fuer $t_{A,B}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{U} := \{ ((U \cap A) + (U \cap B)) \cap -((U \cap A) + (U \cap B)) \mid \\ U \text{ konvexe } t\text{-Nullumgebung} \} .$$

Beweis. Es laeßt sich elementar nachrechnen, daß $\mathcal{U}$ die Bedingungen fuer eine Nullumgebungsbasis in einem topologischen Vektorraum ([10]; S. 14-15) erfuehlt. Die zugehoerige Topologie wollen wir mit $t_{A,B}$ bezeichnen. $t_{A,B}$ ist eine lokalkonvexe Topologie, da alle Mengen in $\mathcal{U}$ konvex sind.

Da jede der Mengen in $\mathcal{U}$ eine Nullumgebung in einer Topologie sein muß, die feiner als t ist und fuer die (A, B) die Eigenschaft (G) hat, genuegt es zu beweisen, daß (A, B) die Eigenschaft (G) bezueglich $t_{A,B}$ hat.

Sei U eine t -Nullumgebung und

$$W := ((U \cap A) + (U \cap B)) \cap -((U \cap A) + (U \cap B)).$$

dann ist

$$W \subset (2 \cdot W \cap A) + (2 \cdot W \cap B) ;$$

denn ist $x \in W$, so ist x von der Form

$$x = a_1 + b_1 = -a_2 - b_2,$$

wobei $a_1, a_2 \in A \cap U$ und $b_1, b_2 \in B \cap U$ ist.

Hieraus ergibt sich

$$a_1 + a_2 = -b_1 - b_2 \in A \cap -B \cap 2.U.$$

Setzen wir

$$x_1 := a_1 + a_2 - a_2 \quad \text{und} \quad x_2 := b_1 + b_2 - b_2,$$

so ist

$$x_1 \in (-B \cap 2.U) + (-A \cap U) \quad \text{und} \quad x_1 = a_1 \in A \cap U,$$

$$x_2 \in (-A \cap 2.U) + (-B \cap U) \quad \text{und} \quad x_2 = b_1 \in B \cap U;$$

zusammen also:

$$x = x_1 + x_2 \in (2.W \cap A) + (2.W \cap B).$$

Damit ist die Eigenschaft (G) bezueglich der
Topologie $t_{A,B}$ nachgewiesen. _1

2.3.2====Satz. Seien A, B konvexe Kegel in einem

LKR (E, t) und $A + B = E$.

Bezeichne $t_{A,B}$ die Topologie aus Satz 2.3.1,

A^*, B^* die Polaren zu A, B in E^* und sei $E' = (E, t)'$.

Dann gilt:

$$(E, t_{A,B})' = ((E' + A^*) \cap (E' + B^*)) - ((E' + A^*) \cap (E' + B^*)).$$

Beweis. Eine Nullumgebungsbasis fuer $t_{A,B}$ ist gegeben durch die Menge

$$\mathcal{W} = \{ \text{ko}(U \cap A, U \cap B) \cap \text{ko}(U \cap -A, U \cap -B) \mid U \text{ t-Nullumgebung} \},$$

da fuer jede konvexe Nullumgebung U gilt:

$$1/2 \cdot U \cap A + 1/2 \cdot U \cap B \subset \text{ko}(U \cap A, U \cap B) \subset U \cap A + U \cap B.$$

Sei U eine abgeschlossene, konvexe t -Nullumgebung und

$$W := \text{ko}(U \cap A, U \cap B) \cap \text{ko}(U \cap -A, U \cap -B).$$

Wenn wir mit $^{\circ}$ die Polaren in $(E, t_{A,B})'$ und mit $\sim$ den Abschluß bezueglich der schwachen Topologie $s(E, E^*)$ bezeichnen, gilt:

$$W^{\circ} = W^* = \text{ko}((\text{ko}(U \cap A, U \cap B))^*, (\text{ko}(U \cap -A, U \cap -B))^*).$$

Dabei ist

$$(\text{ko}(U \cap A, U \cap B))^* = (U \cap A)^* \cap (U \cap B)^* = (U \cap \tilde{A})^* \cap (U \cap \tilde{B})^* =$$

$$(U^* + A^*) \cap (U^* + B^*) = (U^{\circ} + A^*) \cap (U^{\circ} + B^*).$$

Die zweite Gleichung ist richtig, da nach ([8]; Lemma 1)

$$\text{gilt: } (U \cap A)^{\sim} = U \cap \tilde{A}.$$

Es ergibt sich also:

$$W^0 = \text{ko}((U^0 + A^*) \cap (U^0 + B^*), (U^0 - A^*) \cap (U^0 - B^*)).$$

Es folgt die Behauptung, wenn man U von der speziellen Form

$$U = \{f, g\}^0$$

mit $f, g \in (E, t)'$ waeht.

—|

2.3.3 Satz. Sind A, B konvexe Kegel in einem

LKR E und ist $A + B = E$, so vererbt sich die Eigenschaft (G) fuer das Paar (A, B) auf die Mackey-Topologie.

Beweis. (A, B) besitze die Eigenschaft (G) in E .

Setzen wir $m := m(E, E')$, so ist nach 2.3.2

$$\begin{aligned} (E, m_{A, B})' &= ((E' + A^*) \cap (E' + B^*)) - ((E' + A^*) \cap (E' + B^*)) = \\ &= E' , \end{aligned}$$

da $E' = (E, m)'$ ist und (A, B) die Eigenschaft (G) in E hat.

Da $m_{A, B}$ feiner als die Mackey-Topologie m ist und den selben Dualraum besitzt, muß $m = m_{A, B}$ sein. Also hat (A, B) die Eigenschaft (G) auch bezueglich der Topologie m .

—|

2.3.4 Korollar. In einem LKR E mit metrisierbarer Mackey-Topologie $m(E, E')$ seien A, B konvexe Kegel, so daß $A + B$ ein linearer Teilraum von E ist.

Hat (A, B) die Eigenschaft (G) in E , so hat (A, B) die Eigenschaft (G) auch bezüglich der Mackey-Topologie $m(E, E')$.

Beweis. Die Mackey-Topologie $m(E, E')$ stimmt auf $A + B$ mit der Mackey-Topologie $m(A + B, E')$ ueberein, da $m(E, E')$ metrisierbar ist. Also folgt die Behauptung nach 2.33. _1

2.3.5 Bemerkung. In der Arbeit von FREMLIN - JAMESON [5] ist ein Beispiel fuer ein Paar (A, B) linearer Teilraeume des Raumes c der konvergenten Folgen angegeben, das die Eigenschaft (G) bezüglich der schwachen Topologie $s(c, \ell_1)$ hat, nicht aber bezüglich der Mackey-Topologie $m(c, \ell_1)$. Bei diesem Beispiel stimmen also die Mackey-Topologien $m(c, \ell_1)$ und $m(A + B, \ell_1)$ nicht ueberein.

Das naechste Beispiel zeigt, daß Konormalitaet eines konvexen Kegels im Sinne von 2.1.8 nicht invariant gegenueber affinen Homoeomorphismen ist.

2.3.6 Beispiel. Sei A der Kegel der absteigenden reellen Nullfolgen und $E := A - A$.

Mit p bezeichnen wir die Supremumsnorm auf E und mit K die Einheitskugel in (E, p) .

Ferner sei q die Minkowski-Norm zu der Menge

$$ko(K \cap A, K \cap -A) .$$

Auf A stimmen die von p und q erzeugten Topologien ueberein, und $(A, -A)$ hat die Eigenschaft (G) bezueglich q , nicht aber bezueglich p .

Beweis. a) Fuer eine Folge $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $m \in \mathbb{N}$ seien die Folgen ${}^m x$ und x^m definiert durch

$$\begin{aligned} {}^m x(n) &:= \begin{cases} x(n) & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases} \\ x^m(n) &:= \begin{cases} x(m) & n \leq m \\ x(n) & n > m \end{cases} . \end{aligned}$$

Aus den Definitionen ergeben sich direkt die folgenden Beziehungen fuer $x \in A$ und $m \in \mathbb{N}$:

- (1) $p(x) = q(x) ;$
- (2) $x^m \in A \quad \text{und} \quad x^m \in A ;$
- (3) $q(x^m) = p(x^m) \leq p(x) = q(x) ;$
- (4) $\lim_{k \rightarrow \infty} q(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(x^k) = 0 ;$
- (5) $x - x^m = x^m - x^m(x^m) .$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine p -konvergente Folge in A mit p -Limes x . Wir zeigen die Konvergenz bezueglich q .

Sei dazu $\epsilon > 0$. Wegen (4) koennen wir ein $m \in \mathbb{N}$ waehlen, so daB

$$(6) \quad p(x^m) = q(x^m) < \epsilon .$$

Dann gilt auch

$$x_n^m \longrightarrow x^m$$

bezieglich p , und wir koennen ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ finden mit

$$p(x_n^m - x^m) < \epsilon \quad (n > n_\epsilon) .$$

Fuer $n > n_\epsilon$ ist dann

$$|p(x_n^m) - p(x^m)| \leq p(x_n^m - x^m) < \epsilon$$

und wegen (6) also

$$p(x_n^m) < 2 \cdot \epsilon .$$

Zusammen ergibt sich also fuer jedes $n > n_\epsilon$

$$q(x - x_n) \leq q(x - x^m) + q(x^m - x_n^m) + q(x_n^m - x_n) =$$

$$\begin{aligned}
 &= q(x^m - {}^m(x^m)) + q({}^m x - {}^m x_n) + q(x_n^m - {}^m(x_n^m)) \leq \\
 &\leq q(x^m) + q({}^m(x^m)) + q({}^m x - {}^m x_n) + q(x_n^m) + q({}^m(x_n^m)) \leq \\
 &\leq \varepsilon + q(x^m) + q({}^m x - {}^m x_n) + 2 \cdot \varepsilon + q(x_n^m) \leq \\
 &\leq q({}^m x - {}^m x_n) + 6 \cdot \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Fuer große n wird $q({}^m x - {}^m x_n)$ klein, da auf dem m -dimensionalen Teilraum

$${}^m E := \{ {}^m y \mid y \in E \}$$

die Normen $p|_{{}^m E}$ und $q|_{{}^m E}$ aequivalent sind und

$$p({}^m x - {}^m x_n) = \sup_{k \leq m} |x(k) - x_n(k)| \leq p(x - x_n)$$

gilt.

Also ist $x_n \longrightarrow x$ bezueglich q .

Wegen $p \leq q$ stimmen die Topologien von p und von q auf A ueberein.

b) Nach 2.3.1 hat A die Eigenschaft (G) bezueglich q .

c) Der Raum (E, p) ist ein Teilraum von ℓ_∞ .

Gemaeß 2.1.5 hat $(A, -A)$ die Eigenschaft (G) bezueglich p genau dann, wenn E abgeschlossen in ℓ_∞ ist, also wenn (E, p) ein Banach-Raum ist.

Sei x die Folge $x(n) := (-1)^n/n$.

Fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ ist ${}^m x \in E$, ${}^m x \longrightarrow x$ in ℓ_∞
 aber $x \notin E$. Das Paar $(A, -A)$ hat also die Eigen-
 schaft (G) nicht bezueglich p . _ |

2.3.7 Beispiel. Sei $B \subset \ell_\infty$ der Kegel der posi-
 tiven Folgen x , fuer die die Folge $(n \cdot x(n))_{n \in \mathbb{N}}$
 monoton fallend ist.

B ist abgeschlossen in ℓ_∞ , und es gibt ein
 unstetiges, positives, affin-lineares Funktional auf B .

Beweis. a) B ist abgeschlossen, da B Durchschnitt
 der abgeschlossenen Mengen

$B_n := \{ x \in \ell_\infty \mid n \cdot x(n) \geq (n+1) \cdot x(n+1) \geq 0 \}$
 ist.

b) Sei L ein Banach-Limes, also eine Linearform
 auf ℓ_∞ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (i) Fuer $x \in \ell_\infty^+$ ist $L(x) \geq 0$;
- (ii) $L(1) = 1$ (Dabei ist 1 die konstante Folge.);
- (iii) Ist $x \in \ell_\infty$ und y die Folge $y(n) = x(n+1)$,
 so ist $L(x) = L(y)$.

Auf der Menge der konvergenten Folgen stimmt L mit
 dem gewoehnlichen Limes ueberein.

Wir definieren $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := L\left(\left\langle n \cdot x(n) \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}\right) \quad (x \in B) .$$

Dann ist f positiv, affin-linear, und fuer jede endliche Folge x in B ist $f(x) = 0$.

Sei x die Folge $x(n) := 1/n$, und fuer $m \in \mathbb{N}$ sei ${}^m x$ wie im Beweis zu 2.3.6 definiert.

Dann ist $\lim_{m \rightarrow \infty} {}^m x = x$ in ℓ_∞ , $f({}^m x) = 0$ fuer jedes

$m \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 1$. Also ist f unstetig auf B . $_ |$

2.3.8 Bemerkingen.

(i) Ein metrisierbarer LKR (E, t) mit einem erzeugenden, vollstaendigen, konvexen Kegel P ist genau dann vollstaendig, wenn $(P, -P)$ die Eigenschaft (G) hat. Faßt man naemlich P als Kegel in der Vervollstaendigung $(\bar{E}, \bar{t})$ von (E, t) auf, so folgt nach 2.1.5 die Abgeschlossenheit von E in $(\bar{E}, \bar{t})$ genau dann, wenn $(P, -P)$ die Eigenschaft (G) hat.

(ii) In einem metrisierbaren LKR (E, t) mit einem erzeugenden, vollstaendigen, konvexen Kegel P ist die Eigenschaft (G) aequivalent dazu, daß jedes auf

P positive Funktional stetig auf (E, t) ist.

Ist naemlich jedes positive Funktional stetig, so ist $P^* \subset (E, t)'$, und nach 2.3.2 hat $(P, -P)$ die Eigenschaft (G).

Wenn aber $(P, -P)$ die Eigenschaft (G) hat, ist (E, t) vollstaendig und jedes auf P positive Funktional ist nach ([7]; 3.5.6) stetig auf (E, t) .

(iii) In [9] zeigte KLEE, daß der Raum (E, q) aus Beispiel 2.3.6 ein Banach-Raum ist, da der Kegel A ein vollstaendiger Kegel in (E, p) ist.

Also ist jedes auf A positive Funktional stetig auf (E, q) und somit ist $f|_A$ stetig auf A bezueglich p .

Es gibt also abgeschlossene, konvexe Kegel in Banach-Raeumen auf denen jedes positive, affin-lineare Funktional stetig ist, ohne daß $(A, -A)$ die Eigenschaft (G) hat.

Beispiel 2.3.7 zeigt, daß es vollstaendig-metrisierbare, konvexe Mengen gibt, auf denen nicht jedes positive, affin-lineare Funktional stetig ist.

2.4 Die Eigenschaft (aG).

2.4.1 Satz. Jedes Paar (A,B) abgeschlossener linearer Teilraeume in einem schwach-vollstaendigen LKR E hat die Eigenschaft (N) .

Beweis. Sei $F := \{ x \in E \mid f(x) = 0 \text{ fuer alle } f \in E' \}$. Dann ist E/F isomorph zu $(E')^*$, da E $s(E,E')$ vollstaendig ist.

Also ist jeder Teilraum von E' abgeschlossen, und (A,B) hat die Eigenschaft (N) gemaeß ([8]; Korollar 1 zu Theorem 4), da $A^0 + B^0$ ein Teilraum von E' und somit abgeschlossen ist. _!

2.4.2 Satz. Jedes Paar (A,B) linearer Teilraeume in einem LKR E hat die Eigenschaft (aG) bezueglich der schwachen Topologie $s(E,E')$.

Beweis. Seien A,B lineare Teilraeume in einem LKR E und sei $\bar{E}$ die Vervollstaendigung von E bezueglich $s(E,E')$.

Bezeichnet $\bar{}$ den Abschluß in $\bar{E}$, so hat das Paar $(\bar{A},\bar{B})$ die Eigenschaft (N) in $(\bar{E},s(\bar{E},E'))$ nach 2.4.1 .

Gemaeß 2.1.2 hat $(\bar{A}, \bar{B})$ die Eigenschaft (G) in $(\bar{E}, s(\bar{E}, E'))$ und gemaeß 2.1.11 hat auch (A, B) die Eigenschaft (aG) in $(\bar{E}, s(\bar{E}, E'))$.

Es folgt die Behauptung, da $A + B \subset E$ ist. _ |

Das letzte Beispiel zeigt, daß sich die Eigenschaft (aG) nicht auf Mackey-Topologien vererbt, wie der entsprechende Satz ueber die Eigenschaft (G) vielleicht haette vermuten lassen.

2.4.3 Beispiel. Sei $E := \ell_1 \times \ell_1$, $A := \ell_1 \times \{0\}$ und $B := \{0\} \times \ell_1$.

Fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ sei p_n die Minkowski-Norm auf $\mathbb{R}^2$ zu der konvexen Menge

$$\text{ko}\{ \pm (0,1), \pm (1,0), \pm (n,n) \}.$$

Setzen wir fuer $(x,y) \in E$

$$p((x,y)) := \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n((x(n), y(n)))$$

und

$$q((x,y)) := \sum_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| + |y(n)|,$$

so sind p und q Normen auf E .

Der Raum (E, q) ist isometrisch zu ℓ_1 und damit ein Banach-Raum.

A, B sind abgeschlossene Teilraeume von (E, q) auf denen p mit q uebereinstimmt. Fuer alle $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt naemlich

$$p_n((r, 0)) = p_n((0, r)) = |r|.$$

A, B sind also vollstaendige Teilraeume von (E, p) .

Sei x die Folge $x(n) := 1/n$.

Fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ sei die Abschnittsfolge ${}^m x$ wie im Beweis zu 2.3.6 definiert.

Dann ist die Folge $(({}^m x, {}^m x))_{m \in \mathbb{N}}$ eine p -Cauchy-Folge in E , die nicht in E konvergiert, da $(x, x) \notin E$ ist.

Der Raum (E, p) ist also nicht vollstaendig.

Das Paar (A, B) besitzt also gemaeß 2.3.8 (i) nicht die Eigenschaft (G) in (E, p) und wegen 2.1.10 auch nicht die Eigenschaft (aG).

Literaturverzeichnis.

- [1] BAUER, H., An open mapping theorem for convex sets with only one part, Aequationes math. 4 (1970) 332-337 .
- [2] BAUER, H., Intern vollstaendige konvexe Mengen, Theory of sets and topology, 27-38. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1972).
- [3] BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques, chap 1-2, (2^e edition), Act.Sci.et Ind.1189.
- [4] CHOQUET, G., Lectures on Analysis, New York - Amsterdam (1969).
- [5] FREMLIN, D.H. und JAMESON, G.J.O., An example on allied sets, preprint.
- [6] JAMESON, G.J.O., Allied subsets of topological groups and linear spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1968) 653-690.
- [7] JAMESON, G.J.O., Ordered linear spaces, Springer Lecture Notes No. 141 (1970).

- [8] JAMESON, G.J.O., The duality of pairs of wedges,
Proc. London Math. Soc. (3) 24 (1972) 531-547.
- [9] KLEE, V.L., Boundedness and continuity of linear
functionals, Duke Math. J. 22 (1955) 263-269.
- [10] SCHAEFER, H., Topological vector spaces, Springer
graduate texts in mathematics No. 3 (1971).
- [11] WALSH, B., Ordered vector sequence spaces and related
classes of linear operators,
Math. Annalen 206 (1973) 89-138.

Lebenslauf

Am 27. September 1945 wurde ich als Sohn des Dipl. Ing Joachim Bellmann und seiner Ehefrau Baerbel, geb. Utzath, in Walsrode geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Fuerth war ich Schueler der Oberrealschule in Neustadt/Aisch, wo ich im Juni 1964 das Abitur ablegte.

Nach eineinhalb Jahren Wehrdienst begann ich im Sommersemester 1966 das Studium der Mathematik an der Universitaet Erlangen-Nuernberg. Im Mai 1968 bestand ich die Diplom-Vorpruefung fuer Mathematik und im Mai 1971 die Diplompruefung.

Vom 1.11.1968 bis zum 31.1.1972 war ich als studentische- bzw. als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut in Erlangen taetig. Vom 1.2.1972 an verwaltete ich eine Assistentenstelle an der Fakultaet fuer Mathematik der Universitaet Bielefeld und seit dem 26.1.1973 bin ich dort als wissenschaftlicher Assistent angestellt.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren H.Bauer, K.Jacobs, L.Kaup, D.Koelzow, G.Noebeling und W.Specht.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990